

文章编号:1000-8055(2011)03-0711-05

基于响应面法齿轮啮合传动可靠性灵敏度分析

李 昌, 韩 兴

(辽宁科技大学 机械工程与自动化学院, 鞍山 114051)

摘 要: 建立三维参数化齿轮啮合有限元模型, 利用 ANSYS 软件对其进行仿真计算, 得到齿轮啮合的接触应力变化规律. 基于响应面方法综合考虑齿轮各参数的原始制造误差以及转速、载荷等不同工况对齿轮传动的影响, 对齿轮啮合传动进行多次随机虚拟试验, 得出其可靠度, 并以定量的概率给出各参数的可靠性灵敏度. 计算结果得出了各个参数原始制造误差对齿轮接触应力的影响程度.

关 键 词: 随机有限元法; 非线性接触; 齿轮传动; 响应面法; 可靠性灵敏度

中图分类号: TK122

文献标识码: A

Analysis of reliability sensitivity for gear engagement based on response surface methods

LI Chang, HAN Xing

(School of Mechanical Engineering and Automation,

University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, China)

Abstract: Rules of variation of contact stress in gear engagement were obtained by means of dynamic simulation in ANSYS after the three-dimensional parameterize finite element model was created. Based on the effects of original manufacturing errors, rotational speed and load on gear drive, expanded response surface method was adapted in multiple stochastic virtual test of the meshing gear to compute the reliability; and reliability sensitivity of each parameter was given in quantitative probability, providing a theoretical base for fatigue strength calculation and dynamic optimum design of the drive gear mechanism. The effects of different parameters' original manufacturing error on gear contact stress were got.

Key words: random finite element method; nonlinear contact; gear drive; response surface methods; reliability sensitivity

机械多体系统由于在制造和装配过程中存在误差, 导致系统存在随机性, 因此对机械多体随机系统进行动态特性分析具有重要意义. 齿轮传动是最常用的机械传动形式, 齿轮传动受生产加工及装配等工艺的影响, 其几何尺寸、加工误差、材料特性等均具有随机性, 这些随机误差势必要影响齿轮啮合传动的可靠性. 以定量的概率反映各类随机误差对齿轮传动可靠性的影响程度对于实

现齿轮传动系统的动态优化设计具有重要意义.

1 响应面法

响应面方法是进行可靠性分析的一种有效方法, 其思想是通过一系列确定性试验拟合一个响应面来模拟真实极限状态曲面. 假设 Z 与系统随机参量 $Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_r]$ 的关系可用式(1)描述, 通过随机抽样法得到随机参量的 N 个样本

收稿日期: 2010-02-25; 修订日期: 2010-05-24

基金项目: 国家高技术研究发展计划(2006AA04Z408); 辽宁省自然科学基金(20062017)

作者简介: 李昌(1980—), 男, 辽宁凌源人, 讲师, 博士生, 主要从事齿轮传动系统动力学、随机多体结构系统可靠性分析及优化设计、可靠性虚拟试验方法研究.

值,对这 N 个样本值数值计算得到系统响应的一组样本值 $(z_1, z_2, \dots, z_S)$, 利用最小二乘法得到该系统函数; 用该响应面方程代替有限元模型进行失效模式分析, 在结构响应 Z 未知的情况下, 用响应面函数代替结构的真实响应, 将大大节约计算时间^[1].

$$\hat{Z} = a_0 + \sum_{i=1}^R a_i Q_i + \sum_{i=1}^R \sum_{j=i}^R a_{ij} Q_i Q_j \quad (1)$$

式中 $a_0, a_i, a_{ij} (i=1, \dots, R; j=i, \dots, R)$ 为待定系数, 共 $n+1+n(n+1)/2$ 个.

采用矩阵法对每个随机变量取三个水平点, 按照某种法则得出中心所在点和边中点作为样本值点. 图 1 表示三变量 (Q_1, Q_2, Q_3) 样本值点.

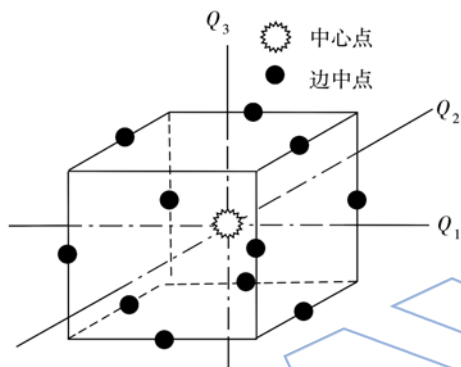


图 1 变量的样本点值
Fig. 1 Swatch of variable

符合某分布的变量可用前法确定变量水平 x_s

$$\int_{-\infty}^{q_s} f(q) dq = p_n, \quad n = 1, 2, 3 \quad (2)$$

式中 $f(q)$ 为变量的概率密度函数; p_n 为水平点, 选取 $p_1=0.01, p_2=0.5, p_3=0.99$.

正态分布变量

$$q_s = \mu + \sigma \psi^{-1}(p_n) \quad (3)$$

式中 μ 为平均值, σ 为标准差, $\psi(\cdot)$ 为标准正态分布函数, $\psi^{-1}(p_n)$ 可查表.

对参变量的 S 个样本点值数值模拟, 得出 S 个输出点 $(z_1, z_2, \dots, z_S)$, 对数据进行回归分析得^[2-4]

$$s = \sum_{i=1}^S \left[z_i - \left(a_0 + \sum_{i=1}^R a_i q_i + \sum_{i=1}^R \sum_{j=i}^R a_{ij} q_i q_j \right) \right]^2 \quad (4)$$

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, R \\ \frac{\partial s}{\partial a_{ij}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, R; j = i, \dots, R \end{cases}$$

对该式进行求解计算, 确定式(1)系数的估测值, 进而确定系统的函数关系式.

2 齿轮啮合传动有限元分析

基于标准渐开线和齿根过渡曲线方程, 建立了齿轮三维有限元模型, 使两齿轮啮合, 旋转找到接触应力最大位置. 根据研究问题的需要, 简化模型, 各自只留下相啮合的三个齿作为研究对象. 计算表明, 这样的处理对计算结果影响不大. 对齿轮进行啮合接触分析, 网格的划分质量对计算结果影响较大. 分别将大、小齿轮的腹板和轮毂切割成六部分, 将各部分相粘接进行体扫描划分网. 选取面单元 MESH200、实体单元 SOLID45 分网, 用各边线控制划分单元的数量, 以保证精度. 小齿轮、大齿轮材质均为 45 号钢, 泊松比为 0.269, 弹性模量为 2.09×10^5 MPa. 加载方式为将大齿轮内孔面节点位移固定, 小齿轮内孔面节点加转矩 $T = 60\,800 \text{ N} \cdot \text{mm}$. 分别利用 TARGE170 和 CONTA174 单元对接触齿面进行单元划分, 定义面接触. 建立有限元模型如图 2, 计算结果如图 3.

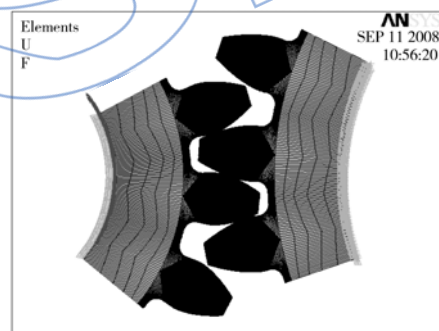


图 2 齿轮啮合有限元模型

Fig. 2 Finite element model of gear

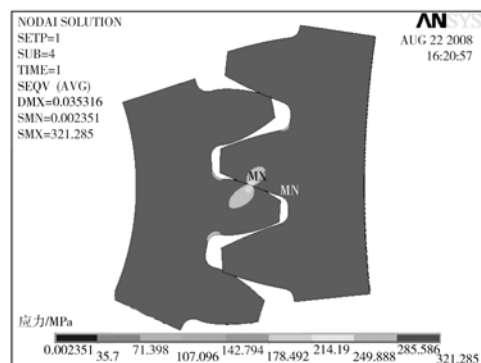


图 3 整体应力云图

Fig. 3 Integral stress diagram

3 可靠度计算及可靠性灵敏度分析

假定设计要求齿轮啮合传动最大极限应力为 $P_{\max}$, 则极限状态函数式为

$$h(\mathbf{Q}) = \hat{Z} - P_{\max}$$

$$h(\mathbf{Q}) = a_0 + \sum_{i=1}^R a_i Q_i + \sum_{i=1}^R \sum_{j=i}^R a_{ij} Q_i Q_j - P_{\max} \quad (5)$$

系统的极限状态函数说明系统的两种模式: $h(\mathbf{Q}) \leq 0$ 为失效模式, 反之为安全模式. 式(5)中各随机参量相互独立, 其均值矩阵和方差矩阵为

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_R], \quad \mathbf{D} = [D_1, D_2, \dots, D_R]$$

则

$$E(Q_i^2) = E^2(Q_i) + D(Q_i) = \mu_i^2 + D_i \quad (6)$$

$$E(Q_i Q_j) = E(Q_i) E(Q_j) = \mu_i \mu_j \quad (7)$$

$$D(Q_i^2) = 4\mu_i^2 D_i + 2D_i \quad (8)$$

$$D(Q_i Q_j) = \mu_i^2 D_j + \mu_j^2 D_i + D_i D_j \quad (9)$$

$$E[h(\mathbf{Q})] = \mu_h(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_R, D_1, D_2, \dots, D_R)$$

$$D[h(\mathbf{Q})] = D_h(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_R, D_1, D_2, \dots, D_R)$$

可靠性可以写作

$$\beta = \frac{\mu_h}{\sqrt{D_h}} \quad (10)$$

若 $h(\mathbf{Q})$ 服从正态分布, 可以得到可靠度

$$R = \phi(\beta) \quad (11)$$

$\phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数, 可用蒙特卡洛模拟法计算.

得到对随机参量的均值矩阵 $\boldsymbol{\mu}$ 和方差矩阵 $\mathbf{D}$ 的可靠性灵敏度为

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} = \frac{\partial R}{\partial \beta} \left[\frac{\partial \beta}{\partial \mu_h} \frac{\partial \mu_h}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} + \frac{\partial \beta}{\partial D_h} \frac{\partial D_h}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{D}^T} = \frac{\partial R}{\partial \beta} \left[\frac{\partial \beta}{\partial \mu_h} \frac{\partial \mu_h}{\partial \mathbf{D}^T} + \frac{\partial \beta}{\partial D_h} \frac{\partial D_h}{\partial \mathbf{D}^T} \right] \quad (13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \beta} = \varphi(\beta); & \frac{\partial \beta}{\partial \mu_h} = \frac{1}{\sqrt{D_h}} \\ \frac{\partial \beta}{\partial D_h} = -\frac{\mu_h}{2D_h^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial \mu_h}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} = \left[\frac{\partial \mu_h}{\partial \mu_1}, \frac{\partial \mu_h}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial \mu_h}{\partial \mu_R} \right]^T \\ \frac{\partial \mu_h}{\partial \mathbf{D}^T} = \left[\frac{\partial \mu_h}{\partial D_1}, \frac{\partial \mu_h}{\partial D_2}, \dots, \frac{\partial \mu_h}{\partial D_R} \right]^T \\ \frac{\partial D_h}{\partial \boldsymbol{\mu}^T} = \left[\frac{\partial D_h}{\partial \mu_1}, \frac{\partial D_h}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial D_h}{\partial \mu_R} \right]^T \\ \frac{\partial D_h}{\partial \mathbf{D}^T} = \left[\frac{\partial D_h}{\partial D_1}, \frac{\partial D_h}{\partial D_2}, \dots, \frac{\partial D_h}{\partial D_R} \right]^T \end{cases} \quad (14)$$

建立齿轮传动各参数与输出的转换关系极限状态方程, 综合考虑各参数原始制造误差, 利用矩阵法确定抽样点在抽样空间的位置, 从而进行一系列确定性拟合试验. 试验中借助有限元软件对齿轮啮合传动进行精确求解, 运用求解所获得的试验数据对极限状态方程进行回归分析, 用多次拟合试验确定极限状态方程组成项及系数, 最后利用极限状态方程计算齿轮啮合传动的可靠性及各变量可靠性灵敏度^[5-9].

接触应力是引起齿轮失效的直接原因, 考虑各种随机误差的影响, 齿轮的模数、齿宽、转矩和压力角均为随机变量, 假定以上随机变量服从正态分布, 其均值和标准差在表1中列出^[10-11].

表1 变量平均值和标准差

Table 1 Average and normal of variable

变量	平均值	标准差
齿轮的模数 m/mm	$\mu_1 = 3.2$	$\sigma_1 = 0.005$
齿宽 B/mm	$\mu_2 = 60$	$\sigma_2 = 0.005$
转矩 $T/(\text{N} \cdot \text{mm})$	$\mu_3 = 60800$	$\sigma_3 = 0.02$
压力角 $\alpha/(\circ)$	$\mu_4 = 20$	$\sigma_4 = 0.02$

根据试验设计方法和式(3)计算结果列入表2. 根据样本点值经过多次有限元计算得到25个响应, 列入表2中最后一列. 由式(4)得到齿轮接触应力响应面函数为

$$Z = -65252 + 3022m + 410B + 5077T + 4662\alpha - 125mT - 84B\alpha - 840T^2 - 940T\alpha - 724\alpha^2$$

取齿轮允许接触应力 $P_{\max} = 350 \text{ MPa}$, 得到齿轮啮合极限状态方程为

$$h(\mathbf{Q}) = -65602 + 3022m + 410B + 5077T + 4662\alpha - 125mT - 84B\alpha - 840T^2 - 940T\alpha - 724\alpha^2$$

对上式用 Monte Carlo 模拟得到 $h(\mathbf{Q})$ 频率图如图4, 在正态概率纸上作 $h(\mathbf{Q})$ 分布图如图5, 近似直线分布; 因此, $h(\mathbf{Q})$ 满足正态分布. 通过对系统极限状态函数蒙特卡洛模拟得到可靠度数据^[12].

$$\mu_h = 1730.51 \quad \sigma_h = 368.195$$

$$\beta = 4.71 \quad R = 0.9609$$

由式(6)~式(9)算得下面的结果

$$\mu_h = 1730.5432, \quad \sigma_h = 368.095$$

与蒙特卡洛模拟所得数据相近.

表 2 样本点值及响应
Table 2 Swatch and answer

样本点	齿轮模数 m/mm		齿宽 B/mm		转矩 $T/(\text{N} \cdot \text{mm})$		压力角 $\alpha/(^{\circ})$		类型	应力输出/ MPa
	水平	取值	水平	取值	水平	取值	水平	取值		
1	p_2	3.2	p_2	60	p_2	60 800	p_2	20	中心点	321.285
2	p_1	3.188 375	p_1	59.988 375	p_2	60 800	p_2	20		319.396
3	p_3	3.211 625	p_1	59.988 375	p_2	60 800	p_2	20		318.140
4	p_1	3.188 375	p_3	60.011 625	p_2	60 800	p_2	20		324.353
5	p_3	3.211 625	p_3	60.011 625	p_2	60 800	p_2	20		323.053
6	p_2	3.2	p_2	60	p_1	60 799.953 5	p_1	19.933 5		321.116
7	p_2	3.2	p_2	60	p_3	60 800.046 5	p_1	19.933 5		324.842
8	p_2	3.2	p_2	60	p_1	60 799.953 5	p_3	20.046 5		318.649
9	p_2	3.2	p_2	60	p_3	60 800.046 5	p_3	20.046 5		317.946
10	p_1	3.188 375	p_2	60	p_2	60 800	p_1	19.933 5		315.645
11	p_3	3.211 625	p_2	60	p_2	60 800	p_1	19.933 5		318.743
12	p_1	3.188 375	p_2	60	p_2	60 800	p_3	20.046 5		310.545
13	p_3	3.211 625	p_2	60	p_2	60 800	p_3	20.046 5		328.642
14	p_2	3.2	p_1	59.988 375	p_1	60 799.953 5	p_2	20	边中点	327.842
15	p_2	3.2	p_3	60.011 325	p_1	60 799.953 5	p_2	20		326.452
16	p_2	3.2	p_1	59.988 375	p_3	60 800.046 5	p_2	20		323.666
17	p_2	3.2	p_3	60.011 625	p_3	60 800.046 5	p_2	20		315.843
18	p_1	3.188 375	p_2	60	p_1	60 799.953 5	p_2	20		317.304
19	p_3	3.211 625	p_2	60	p_1	60 799.953 5	p_2	20		314.423
20	p_1	3.188 375	p_2	60	p_3	60 800.046 5	p_2	20		324.472
21	p_3	3.211 625	p_2	60	p_3	60 800.046 5	p_2	20		318.578
22	p_2	3.2	p_1	59.988 375	p_2	60 800	p_1	19.933 5		319.482
23	p_2	3.2	p_3	60.011 625	p_2	60 800	p_1	20.046 5		317.783
24	p_2	3.2	p_1	59.988 375	p_2	60 800	p_3	20.046 5		316.549
25	p_2	3.2	p_3	60.011 625	p_2	60 800	p_3	20.046 5		324.543

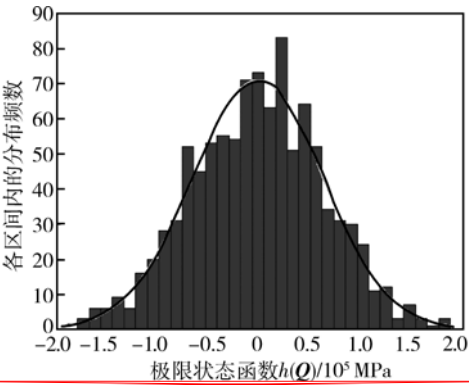


图 4 $h(Q)$ 的频率图

Fig. 4 Frequency chart for $h(Q)$

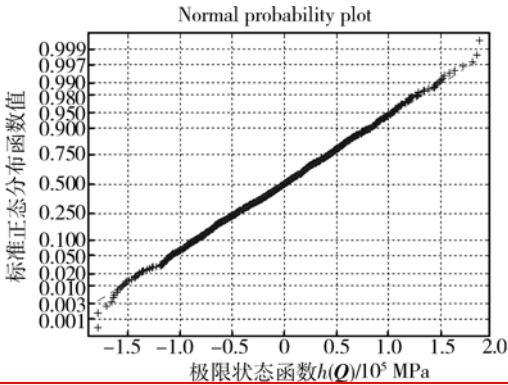


图 5 $h(Q)$ 的概率图

Fig. 5 Probability distributing chart for $h(Q)$

用 μ_h 和 D_h 分别对矩阵 μ 和矩阵 D 求导数得

$$\frac{\partial R}{\partial \mu^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial R}{\partial \mu_2} \\ \frac{\partial R}{\partial \mu_3} \\ \frac{\partial R}{\partial \mu_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.39778 \\ 0.04452 \\ 0.81745 \\ 0.00342 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial R}{\partial D^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial D_1} \\ \frac{\partial R}{\partial D_2} \\ \frac{\partial R}{\partial D_3} \\ \frac{\partial R}{\partial D_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.21262 \\ -0.01233 \\ -0.75175 \\ -0.07432 \end{bmatrix}$$

结果表明,模数、转矩对接触应力影响较大,齿宽和压力角对接触应力的灵敏度较小。基本随机参数方差的增加都会降低齿轮的可靠度。对可靠度敏感的参数在设计中应严格控制。该法为齿轮传动设计提供了理论依据。

参考文献:

- [1] 冈本纯三,黄志强. 球轴承的设计计算[M]. 北京:机械工业出版社,2003.
- [2] 赵联春. 球轴承振动的研究[D]. 杭州:浙江大学,2003.
ZHAO Lianchun. Research on vibration of ball bearing [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003. (in Chinese)
- [3] Harsha S P, Kankar P K. Stability analysis of a rotor bearing system due to surface waviness and number of balls [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2004, 46 (7): 1057-1081.
- [4] Ganesan R. Effects of bearing and shaft asymmetries on the instability of rotors operating at near-critical speeds [J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35 (5): 737-752.
- [5] Gray G G, Johnson K L. The dynamic response of elastic bodies in rolling contact to random roughness of their surfaces [J]. Journal of Sound and Vibration, 1972, 22 (3): 323-342.
- [6] Gupta P K. Dynamics of rolling-element bearings Part III: Ball bearing analysis [J]. Journal of Lubrication Technology, 1979, 101: 312-318.
- [7] Wensing J A, Van Nijen G C. The dynamic behavior of a system that includes a rolling bearing [J]. Proc. Instn. Mech. Engrs., 2001, 215 (6): 509-518.
- [8] 李昌,孙志礼. 基于弹流润滑理论的深沟球轴承动态虚拟仿真[J]. 航空动力学报, 2009, 24 (4): 951-956.
LI Chang, SUN Zhili. Dynamic virtual simulation of deep groove ball bearing: based on elastohydrodynamic lubrication theory [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24 (4): 951-956. (in Chinese)
- [9] 闫明,孙志礼,杨强. 基于响应面方法的可靠性灵敏度分析方法[J]. 机械工程学报, 2007, 43 (10): 67-71.
YAN Ming, SUN Zhili, YANG Qiang. Analysis method of reliability sensitivity based on response surface methods [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43 (10): 67-71. (in Chinese)
- [10] 张义民. 影响车辆前轴可靠度的参数灵敏度分析[J]. 农业机械学报, 2004, 35 (3): 5-8.
ZHANG Yimin. Parametric sensitivity in reliability of front-axle of a vehicle [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 2004, 35 (3): 5-8. (in Chinese)
- [11] 孙志礼,陈良玉. 实用机械可靠性设计理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [12] Soo E L, Sallen A B, Basri M, et al. Response surface methodological study on lipase-catalyzed synthesis of amino acid surfactants [J]. Process Biochemistry, 2004, 39 (11): 1511-1518.